

Annexe II

SYSTÈMES DE COMMANDE LINÉAIRE PAR SIMPLE BOUCLAGE ET AVEC MODÈLE INTERNE

INTRODUCTION.

Cette annexe établit l'expression des correcteurs -S et -D dans le cas de modèles discrets linéaires mono-entrée/mono-sortie du processus. Puis elle étudie les propriétés de systèmes de commande utilisant ces correcteurs, des systèmes de commande par simple bouclage (SCSB), ou avec modèle interne (SCMI). Le but de cette étude est, outre une récapitulation utile des résultats en linéaire, leur généralisation partielle au cas de modèles et de correcteurs non linéaires, par exemple des réseaux de neurones, généralisation mise à profit au chapitre 5.

I. CORRECTEURS -S ET -D.

Les correcteurs -S et -D sont particuliers aux modèles à temps discret ; soit un tel modèle de retard d , les définitions des correcteurs sont les suivantes :

Correcteur-S : il impose au modèle une sortie de référence.

Soit une trajectoire de référence $\{y_r(k)\}$. Le correcteur-S délivre à chaque instant k une commande telle que, quel que soit l'état du modèle à cet instant, et si aucune perturbation n'intervient, *la sortie du modèle est égale à la sortie de référence* à partir de l'instant $k+d$:

$$y(k') = y_r(k') \quad \forall k' \geq k+d$$

Correcteur-D : il impose au modèle une dynamique de référence.

Soit une trajectoire de consigne $\{r(k)\}$, et une dynamique donnée par un modèle de référence linéaire de retard d de sortie y_r telle que $E(q) y_r(k+d) = H(q) r(k)$, ou E et H sont deux polynômes en q^{-1} . Le correcteur-D délivre à chaque instant k une commande telle que, quel que soit l'état du modèle à cet instant, et si aucune perturbation n'intervient, *la dynamique du modèle est égale à la dynamique de référence* à partir de l'instant $k+d$:

$$E(q) y(k') = q^{-d} H(q) r(k') \quad \forall k' \geq k+d$$

Notons que le correcteur-S est un cas particulier du correcteur-D, avec $E(q) = H(q) = 1$. Cependant, sa mise en œuvre est suffisamment particulière pour que nous traitions son cas séparément du cas du correcteur-D : en effet, elle nécessite un modèle de référence au sein des systèmes de commande qui l'utilisent pour calculer la trajectoire de référence $\{y_r(k)\}$ à partir de la consigne (voir chapitre 5).

Dans le cas linéaire, il n'est pas nécessaire de traiter le cas des modèles d'état, que l'on peut toujours écrire sous une forme entrée-sortie adéquate [GOO84]. Mais le but de cette présentation est une généralisation au cas non linéaire : or le modèle non linéaire disponible peut être du type représentation d'état. La mise sous forme entrée-sortie de ce modèle demanderait l'apprentissage d'un modèle entrée-sortie, apprentissage dont les difficultés ont été soulevées au chapitre 2 §I.2.2.3 (ordre du modèle entrée-sortie...). Nous étudions donc aussi l'expression des correcteurs dans le cas où l'on dispose d'un modèle d'état. Les expressions des correcteurs dans le cas d'un modèle linéaire entrée-sortie sont données dans [GOO84].

I.1. EXPRESSIONS DES CORRECTEURS DANS LE CAS D'UN MODÈLE ENTRÉE-SORTIE.

Nous considérons le modèle discret linéaire entrée-sortie de retard d suivant :

$$A(q) y(k) = B(q) u(k)$$

avec :

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q) = q^{-d} B'(q) = q^{-d} (b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{m'} q^{-m'})$$

où d est le retard du modèle. Le degré du polynôme B est $d + m' = m$.

I.1.1. Correcteur-S.

Comme le modèle possède un retard d , la commande $u(k)$ affecte la sortie à l'instant $k+d$. Cherchons les arguments en fonction desquels s'exprime la sortie $y(k+d)$:

- pour calculer $y(k+1)$, on a besoin de $y(k), \dots, y(k-n+1), u(k-d+1), \dots, u(k-d-m'+1)$;

- pour calculer $y(k+2)$, on a besoin, en plus, de $u(k-d+2)$;

...

- pour calculer $y(k+d)$, on a besoin, en plus, de $u(k)$, d'où :

$$\begin{aligned} y(k+d) &= \varphi(y(k), \dots, y(k-n+1), u(k), \dots, u(k-d-m'+1)) \\ &= \varphi(y(k), \dots, y(k-n+1), u(k), \dots, u(k-m+1)) \end{aligned}$$

En linéaire, il est facile de calculer la fonction φ , ou prédicteur à d pas de la sortie. Le raisonnement précédent montre qu'il faut effectuer la division $1/A$ limitée aux d premiers termes :

$$\frac{1}{A(q)} = F(q) + q^{-d} \frac{G(q)}{A(q)} \quad \text{soit : } 1 = F(q)A(q) + q^{-d} G(q)$$

où F , monique, et G sont les uniques polynômes de degrés $d-1$ et $n-1$ satisfaisant cette égalité :

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{d-1} q^{-d+1}$$

$$G(q) = g_0 + g_1 q^{-1} + \dots + g_{n-1} q^{-n+1}$$

Les coefficients de F et de G sont :

$$f_0 = 1 ; f_i = - \sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j} \text{ pour } i=1 \text{ à } d-1 ; g_i = - \sum_{j=0}^{d-1} f_j a_{i+d-j} \text{ pour } i=0 \text{ à } n-1 .$$

Pour obtenir l'expression du prédicteur, on multiplie celle du modèle par le polynôme F :

$$F(q) A(q) y(k) = F(q) q^{-d} B'(q) u(k) ; \text{ comme } F(q)A(q) = 1 - q^{-d} G(q) :$$

$$y(k) = q^{-d} G(q) y(k) + q^{-d} F(q) B'(q) u(k) \text{ soit :}$$

$$y(k+d) = G(q) y(k) + F(q) B'(q) u(k)$$

qui est l'expression du prédicteur cherché, encore appelé prédicteur à d pas.

Le correcteur-S est le correcteur qui permet d'obtenir $y(k+d)=y_r(k+d)$; il s'écrit donc :

$$u(k) = y_r(k+d) - G(q) y(k) + (1-F(q) B'(q)) u(k)$$

où G est de degré n-1 et 1-FB' de degré $d-1+m' = m-1$. Ce correcteur est en général bouclé (dès que $m>1$). Si cette commande est appliquée à l'instant k, et si aucune perturbation n'intervient ensuite, le système bouclé obéit à :

$$B(q) u(k) = A(q) y_r(k) \quad \forall k' \geq k+d$$

Le correcteur-S est donc stable si les racines du polynôme B sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire si le modèle est à *minimum de phase*.

Remarque.

Tous les polynômes utilisés dans les expressions de prédicteurs et de correcteurs ont un terme constant (en q^0).

I.1.2. Correcteur-D.

Soit la dynamique de référence donnée par le modèle :

$$E(q) y_r(k+d) = H(q) r(k)$$

avec :

$$E(q) = 1 + e_1 q^{-1} + \dots + e_p q^{-p}$$

$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_p q^{-p}$$

Le prédicteur nécessaire à la synthèse du correcteur-D s'obtient en effectuant la division de E par A limitée aux d premiers termes :

$$\frac{E(q)}{A(q)} = F(q) + q^{-d} \frac{G(q)}{A(q)} \text{ soit } E(q) = F(q) A(q) + q^{-d} G(q)$$

où F, monique, et G sont les deux seuls polynômes de degrés d-1 et n-1 satisfaisant l'équation ci-dessus (ceci suppose $p \leq d+n-1$). Les coefficients de F et de G sont :

$$f_0 = 1 ; f_i = - \sum_{j=0}^{i-1} f_j a_{i-j} - e_i \text{ pour } i=1 \text{ à } d-1 ; g_i = - \sum_{j=0}^{d-1} f_j a_{i+d-j} - e_{i+d} \text{ pour } i=0 \text{ à } n-1 .$$

Pour obtenir l'expression du prédicteur associé au problème, on multiplie comme précédemment celle du modèle par le polynôme F :

$$F(q) A(q) y(k) = F(q) q^{-d} B'(q) u(k) ; \text{ comme } F(q) A(q) = E(q) - q^{-d} G(q) :$$

$$E(q) y(k) = q^{-d} G(q) y(k) + q^{-d} F(q) B'(q) u(k) \text{ soit :}$$

$$E(q) y(k+d) = G(q) y(k) + F(q) B'(q) u(k)$$

qui est l'expression du prédicteur cherché.

Le correcteur-D est le correcteur qui permet d'obtenir $E(q) y(k+d) = H(q) r(k)$: il s'écrit donc :

$$u(k) = H(q) r(k) - G(q) y(k) + (1 - F(q) B'(q)) u(k)$$

G est un polynôme en q^{-1} de degré n-1 et $1-FB'$ est de degré m-1. Le correcteur est en général bouclé (dès que $m > 1$). Si cette commande est appliquée à l'instant k, et si aucune perturbation n'intervient ensuite, le système bouclé obéit à :

$$E(q) B(q) u(k) = E(q) A(q) y_r(k) \quad \forall k' \geq k+d$$

Pour que le correcteur-D soit stable, il faut donc aussi que le modèle soit à *minimum de phase*.

I.2. EXPRESSIONS DES CORRECTEURS DANS LE CAS D'UN MODÈLE D'ÉTAT.

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, nous traitons le problème dans le cas d'une représentation d'état uniquement en vue de la généralisation aux modèles non linéaires. Nous considérons le modèle discret linéaire d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

où A est une matrice n x n, B une matrice colonne n x 1, et C une matrice ligne 1 x n. Son ordre relatif est d.

I.2.1. Correcteur-S.

Comme dans le cas entrée-sortie, cherchons le prédicteur de la sortie du modèle à d pas, ou d est l'ordre relatif du modèle. Pour un modèle mono-entrée/mono-sortie linéaire ou non, l'ordre relatif est défini comme le retard existant entre l'entrée et la sortie du modèle, c'est-à-dire l'entier d tel que, que pour x(k) et u(k) donnés, l'effet de l'entrée u(k) apparaît à la sortie après d pas :

$$y(k+1) = CA x(k) + CB u(k)$$

$$y(k+2) = CA^2 x(k) + CAB u(k) + CB u(k+1)$$

...

$$y(k+i) = CA^i x(k) + \sum_{j=1}^i CA^{i-j} B u(k+j-1)$$

L'ordre relatif d est donc la plus petite valeur entière de j telle que : $CA^{j-1}B \neq 0$. Pour un modèle mono-entrée/mono-sortie, $CA^{d-1}B$ est un scalaire. On a :

$$y(k+d) = CA^d x(k) + CA^{d-1}B u(k)$$

qui est l'expression du prédicteur à d pas pour un modèle d'état.

Le correcteur-S est le correcteur qui permet d'obtenir $y(k+d) = y_r(k+d)$. Son expression est donc :

$$u(k) = \frac{1}{CA^{d-1}B} (y_r(k+d) - CA^d x(k))$$

Ce correcteur n'est pas bouclé, sa sortie n'est fonction que du signal de référence et de l'état du modèle. La dynamique du système {correcteur+modèle} est :

$$x(k+1) = \left(A - \frac{BCA^d}{CA^{d-1}B} \right) x(k) + \frac{B}{CA^{d-1}B} y_r(k+d)$$

Pour que la commande soit applicable (bornée), il est nécessaire que la matrice :

$$A - \frac{BCA^d}{CA^{d-1}B}$$

ait des valeurs propres à de module inférieur à 1. Cela signifie en particulier que le modèle doit être à *minimum de phase*.

I.2.2. Correcteur-D.

Par définition du correcteur-D, on désire obtenir :

$$E(q) y(k+d) = H(q) r(k)$$

soit :

$$y(k+d) + e_1 y(k+d-1) + \dots + e_p y(k+d-p) = H(q) r(k)$$

Calculons chacun des y en fonction de l'état à l'instant k, quand c'est possible. On a :

$$y(k) = C x(k)$$

$$y(k+1) = CA x(k)$$

...

$$y(k+d) = CA^d x(k) + CA^{d-1}B u(k)$$

Il faut donc que :

$$CA^d x(k) + CA^{d-1}B u(k) + \dots + e_d C x(k) + e_{d+1} y(k-1) + \dots + e_p y(k+d-p) = H(q) r(k)$$

L'expression du correcteur est :

- si $p > d$:

$$u(k) = \frac{1}{CA^{d-1}B} \left[H(q) r(k) - \left(CA^d + e_1 CA^{d-1} + \dots + e_d C \right) x(k) - \left(e_{d+1} y(k-1) + \dots + e_p y(k+d-p) \right) \right]$$

- si $p \leq d$:

$$u(k) = \frac{1}{CA^{d-1}B} \left[H(q) r(k) - \left(CA^d + e_1 CA^{d-1} + \dots + e_p CA^{d-p} \right) x(k) \right]$$

Ce correcteur n'est pas bouclé : ses arguments sont des valeurs successives du signal de référence (pondérées par le polynôme H), l'état du modèle, et un certain nombre de valeurs de ses sorties antérieures. Si $p > d$, il est impossible d'exprimer $u(k)$ uniquement en fonction de la consigne et de l'état¹.

¹ Pour une expression du correcteur-D formulée comme un retour d'état statique, voir [GOO84], p. 148 et suivantes : l'état choisi s'exprime comme une combinaison linéaire des sorties et des commandes passées. Nous préférons la solution proposée ci-dessus, qui fournit dans tous les cas un correcteur non bouclé, et donc plus facile à réaliser par apprentissage avec un réseau de neurones (on peut utiliser un algorithme dirigé).

II. SYSTÈMES DE COMMANDE POUR LA POURSUITE ET LA RÉGULATION.

Nous étudions les propriétés des systèmes de commande par simple bouclage (SCSB) et avec modèle interne (SCMI) proposés au chapitre 5, dans le cas d'un processus linéaire, sous forme entrée-sortie, de retard $d=1$:

$$A_p(q) y_p(k) = B_p(q) u(k) + A_p(q) p(k) = q^{-1} B_p'(q) u(k) + A_p(q) p(k)$$

où A_p est un polynôme monique de degré n , et B_p un polynôme de degré m . y_p est la sortie du processus, u la commande, et p est une perturbation additive en sortie du processus. Le modèle est stable et à inverse stable, c'est-à-dire que les zéros de A_p et de B_p sont à l'intérieur du cercle unité.

Les systèmes de commandes étudiés sont tous conçus pour que leur dynamique de poursuite, c'est-à-dire la dynamique de suivi de la consigne $r(k)$, soit la dynamique de référence définie par le modèle :

$$E(q) y_r(k+1) = H(q) r(k)$$

où E et H sont deux polynômes d'ordre $p \leq d+n-1$:

$$E(q) = 1 + e_1 q^{-1} + \dots + e_p q^{-p}$$

$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + \dots + h_p q^{-p}$$

Nous supposons qu'une identification du processus a conduit au modèle linéaire :

$$A(q) y(k) = B(q) u(k) = q^{-1} B'(q) u(k)$$

où A est un polynôme monique de degré n , et B un polynôme de degré m . Les zéros de B sont supposés à l'intérieur du cercle unité.

Enfin, pour rendre compte de l'influence des défauts d'apprentissage du correcteur sur les SCMI, nous considérons que le correcteur n'est généralement pas parfait (parfaitement adapté au modèle).

- D'après le §I.1.1 de cette annexe, l'expression du correcteur-S parfait est ($d=1$, $F=1$, $B'=qB$) :

$$B'(q) u(k) = y_r(k+1) + q(A(q) - 1) y(k)$$

Nous considérons le correcteur suivant :

$$B_c'(q) u(k) = y_r(k+1) + q(A_c(q) - 1) y(k)$$

où A_c est un polynôme monique ; les zéros de B_c sont supposés à l'intérieur du cercle unité (condition nécessaire à la stabilité interne du système de commande).

- D'après le §I.1.2 de cette annexe, le correcteur-D parfait est :

$$B'(q) u(k) = H(q) r(k) + q(A(q) - E(q)) y(k).$$

Nous considérons le correcteur suivant :

$$B_c'(q) u(k) = H(q) r(k) + q(A_c(q) - E(q)) y(k)$$

Nous étudions les propriétés des systèmes de commande en matière de stabilité, et de performance en poursuite et en régulation :

- pour les SCSB : dans le cas nominal ($A_c=A_p$, $B_c=B_p$), et non nominal ($A_c \neq A_p$, $B_c \neq B_p$).
- pour les SCMI : dans le cas nominal ($A_p=A$, $B_p=B$), nous étudions l'influence d'une imperfection éventuelle du correcteur ($A_c \neq A$, $B_c \neq B$) ; nous étudions aussi les propriétés du système non nominal, lorsque le correcteur est parfait ($A_p \neq A$, $B_p \neq B$ et $A_c=A$, $B_c=B$).

II.1. SYSTÈMES DE COMMANDE PAR SIMPLE BOUCLAGE (SCSB).

II.1.1. SCSB utilisant un correcteur-S.

Dans un SCSB, le correcteur-S est mis en cascade avec le processus :

$$B_c'(q) u(k) = y_r(k+1) + q (A_c(q) - 1) y_p(k)$$

où y_p est la sortie mesurée du processus. La sortie de référence y_r est calculée par un modèle de référence qui peut être soit un *modèle de poursuite*, soit un *modèle de ralliement*.

II.1.1.1. Avec un modèle de poursuite.

Le modèle de poursuite s'écrit :

$$E(q) y_r(k+1) = H(q) r(k)$$

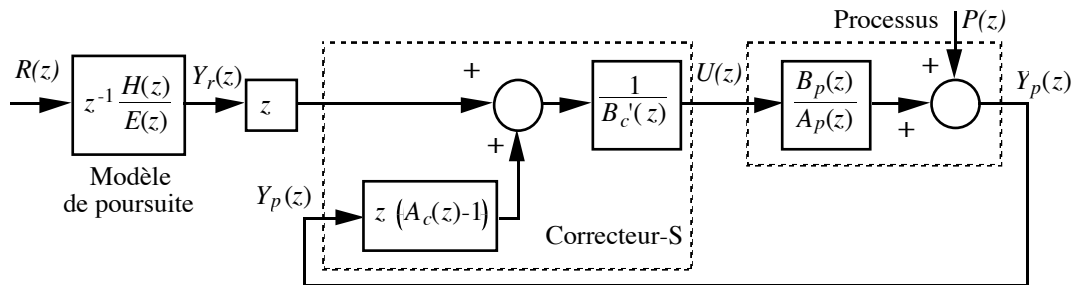


Figure 1.

SCSB avec correcteur-S et modèle de poursuite.

La transformée en z de la commande u de la figure 1, en fonction de la consigne et de la perturbation, est la suivante :

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) + z (A_c(z) - 1) P(z) \right)$$

a) **Fonctionnement nominal** ($A_c = A_p, B_c = B_p$) .

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) + z (A_p(z) - 1) P(z) \right)$$

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + A_p(z) P(z)$$

La dynamique de poursuite du système est évidemment la dynamique du modèle de poursuite. La dynamique de régulation est donnée par le polynôme A_p : le régime permanent est atteint en n pas.

Par définition du correcteur-S, s'il n'y pas de perturbation, il n'y a pas d'erreur statique. Mais soit une perturbation additive de sortie en échelon :

$$P(z) = \frac{P_0}{1 - z^{-1}}$$

Cette perturbation n'est pas rejetée ; elle provoque une erreur statique :

$$E_0 = P_0 \sum_{i=0}^n a_{ip}$$

De plus, comme l'indique la fonction de transfert de U par rapport à P, si le polynôme B_p possède des zéros négatifs, en réponse à une perturbation la commande oscille à chaque instant. Par rapport à la consigne R, la commande est filtrée par E, et l'effet des éventuels zéros négatifs de B_p est très atténué par le facteur E.

b) Fonctionnement non nominal ($A_c \neq A_p$, $B_c \neq B_p$).

$$Y_p(z) = \frac{1}{B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} \left(B_p'(z) z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + A_p(z) B_c'(z) P(z) \right)$$

La stabilité du système de commande est fonction de l'inadéquation du correcteur par rapport au processus. Nous allons comparer l'influence de cette inadéquation sur la stabilité de ce système et sur celle du système de commande du paragraphe II.1.1.2 suivant, pour A_p , B_p , A_c et B_c donnés.

II.1.1.2. Avec un modèle de ralliement.

Le modèle de ralliement s'écrit :

$$y_r(k+1) = (1 - E(q)) y_p(k+1) + H(q) r(k)$$

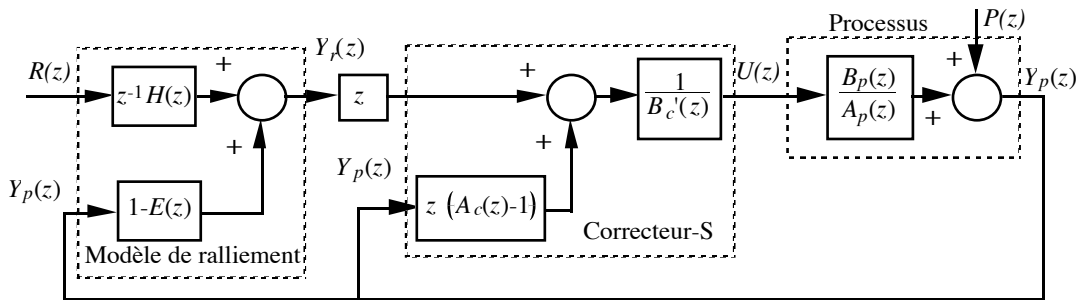


Figure 2.
SCSB avec correcteur-S et modèle de ralliement.

La sortie du correcteur-S de la figure 2 est la suivante :

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{E(z) B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} \left(H(z) R(z) + z (A_c - E(z)) P(z) \right)$$

a) Fonctionnement nominal ($A_c = A_p$, $B_c = B_p$).

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) + z \left(\frac{A_p(z)}{E(z)} - 1 \right) P(z) \right)$$

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + \frac{A_p(z)}{E(z)} P(z)$$

La dynamique de poursuite du système de commande est évidemment encore la dynamique de référence. Grâce au modèle de ralliement, qui possède comme argument la sortie du processus et prend ainsi d'éventuelles perturbations de sortie en considération, la dynamique de régulation est donnée par le polynôme A_p/E : le régime permanent est atteint asymptotiquement. Il existe une erreur statique dont l'amplitude est :

$$E_0 = P_0 \frac{\sum_{i=0}^n a_{pi}}{\sum_{i=0}^n e_i}$$

L'erreur statique est ainsi généralement plus importante que dans le cas précédent². En revanche, la commande est filtrée par E, donc son comportement est satisfaisant en réponse à une perturbation de sortie quel que soit B_p (la commande n'oscille que faiblement si B_p possède des zéros négatifs), ce qui constitue un avantage important de ce système de commande sur le précédent.

b) Fonctionnement non nominal (A_c ≠ A_p, B_c ≠ B_p).

$$Y_p(z) = \frac{1}{E(z)B_p'(z) + (A_p(z)B_c'(z) - A_c(z)B_p'(z))} \left(B_p'(z) z^{-1} H(z) R(z) + A_p(z) B_c'(z) P(z) \right)$$

La stabilité du système de commande est déterminée par les racines du polynôme au dénominateur.

Étude simplifiée de la stabilité.

Nous allons voir que la stabilité de la plupart des systèmes de commande étudiés dépend des racines d'un polynôme D(z) de la forme :

$$D(z) = \varepsilon(z) B_1(z) + A_1(z) B_2(z) - A_2(z) B_1(z)$$

avec, dans le cas du SCSB avec correcteur-S et modèle de poursuite :

$$\varepsilon(z) = 1 ; A_1(z) = A_p(z) ; B_1(z) = B_p'(z) ; A_2(z) = A_c(z) ; B_2(z) = B_c'(z).$$

et dans le cas du SCSB avec correcteur-S et modèle de ralliement :

$$\varepsilon(z) = E(z) ; A_1(z) = A_p(z) ; B_1(z) = B_p'(z) ; A_2(z) = A_c(z) ; B_2(z) = B_c'(z).$$

Nous allons montrer sur un exemple que, si $\varepsilon(z) = E(z) \neq 1$, la stabilité du système est plus robuste vis-à-vis d'un écart entre les polynômes A₁ et A₂ et les polynômes B₁ et B₂, que si $\varepsilon(z) = 1$.

Considérons le cas particulier d'un processus du premier ordre, dont le correcteur n'est pas parfait, mais possède un gain statique égal à l'inverse de celui du processus, 1 par exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(q) = 1 + a_1 q^{-1} \\ B_1(q) = (1 + a_1) q^{-1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} A_2(q) = 1 + a_2 q^{-1} \\ B_2(q) = (1 + a_2) q^{-1} \end{array} \right\}, \varepsilon(q) = 1 + e q^{-1}$$

où a₁, a₂ et e sont des réels négatifs appartenant à]-1; 0[. La racine du polynôme D(z) s'écrit :

$$\frac{a_2 - a_1 - e(1 + a_1)}{1 + a_2} = 1 - \frac{(1 + e)(1 + a_1)}{1 + a_2}$$

La valeur de la racine n'est jamais supérieure à 1 ; la condition pour qu'elle soit inférieure à -1 (et donc que le système de commande soit instable) est :

$$2 \frac{1 + a_2}{1 + a_1} < 1 + e$$

Plus e est petit (e ≤ 0), moins le système risque d'être instable. En conclusion, pour A₁ et A₂ donnés, le système de commande est d'autant plus stable que E impose une dynamique lente (filtre passe-bas).

² En effet, la somme des e_i est aussi le produit des racines du polynôme E (monique), toutes de module inférieur à 1 puisque E est stable : cette somme est donc inférieure à 1.

Revenons à la comparaison des SCSB avec modèle de poursuite et modèle de ralliement. Leur stabilité est donc déterminée par $D(z)$, où $A_1=A_p$, $B_1=B_p'$, $A_2=A_c$, $B_2=B_c'$ dans les deux cas ; mais pour le système avec modèle de poursuite $\varepsilon(z)=1$, donc $e=0$, alors que pour le système avec modèle de ralliement $e<0$: il vaut donc mieux utiliser un modèle de ralliement du point de vue de la stabilité.

Application numérique : $a_p = a_1 = -0,8$; $a_c = a_2 = -0,95$.

- SCSB avec modèle de poursuite : le système est instable.

$$2 \frac{1 - 0,95}{1 - 0,8} = 0,5 < 1$$

- SCSB avec modèle de ralliement : le système est stable dès que $e < -0,5$, ce qui permet encore d'accélérer le processus de façon appréciable.

En conclusion, si l'on utilise un correcteur-S dans un SCSB, le modèle de référence du système doit être un modèle de ralliement, qui garantit une meilleure stabilité et un meilleur comportement en réponse à des perturbations de sortie, qu'un modèle de poursuite.

II.1.2. SCSB utilisant un correcteur-D.

Dans un SCSB, le correcteur-D est mis en cascade avec le processus :

$$B_c'(q) u(k) = H(q) r(k) + q (A_c(q) - E(q)) y_p(k)$$

où y_p est la sortie mesurée du processus. Comme le montre la comparaison de la figure 3 avec la figure 2 (correcteur-S avec modèle de ralliement du §II.1.1.2), les deux systèmes de commande sont rigoureusement équivalents.

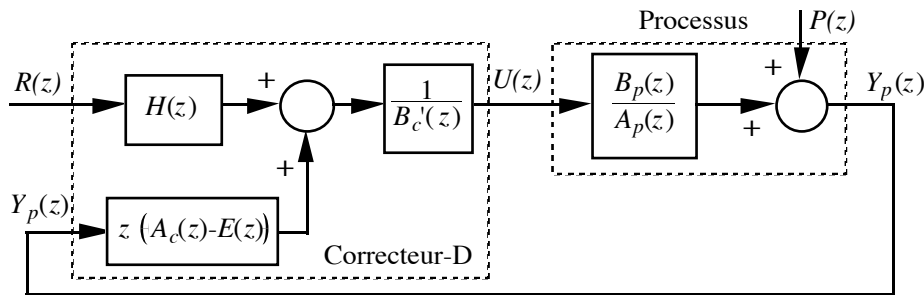


Figure 3.
SCSB avec correcteur-D.

II.2. SYSTÈMES DE COMMANDE AVEC MODÈLE INTERNE (SCMI).

Pour les SCMI, nous montrons également l'influence d'un correcteur imparfait ; cette imperfection n'a pas lieu d'être envisagée si les coefficients du correcteur sont calculés à partir de ceux du modèle, mais doit l'être si l'on apprend un réseau correcteur à partir du modèle.

II.2.1. SCMI utilisant un correcteur-S.

Dans un SCMI, le correcteur-S est mis en cascade avec le modèle interne (MI) :

$$B_c'(q) u(k) = y_r^*(k+1) + q (A_c(q) - 1) y(k)$$

où y est la sortie du MI, et y_r^* est la sortie de référence pour le MI. Trois modèles de référence sont *a priori* possibles pour le calcul de la sortie de référence : un *modèle de poursuite à l'extérieur* de la boucle du MI, un *modèle de poursuite à l'intérieur* de celle-ci, ou encore un *modèle de ralliement* pour le MI.

II.2.1.1. Avec un modèle de poursuite extérieur.

L'expression du modèle de poursuite à l'extérieur de la boucle du MI est :

$$E(q) y_r(k+1) = H(q) r(k)$$

L'entrée de référence du correcteur-S est :

$$y_r^*(k+1) = y_r(k+1) - (y_p(k) - y(k))$$

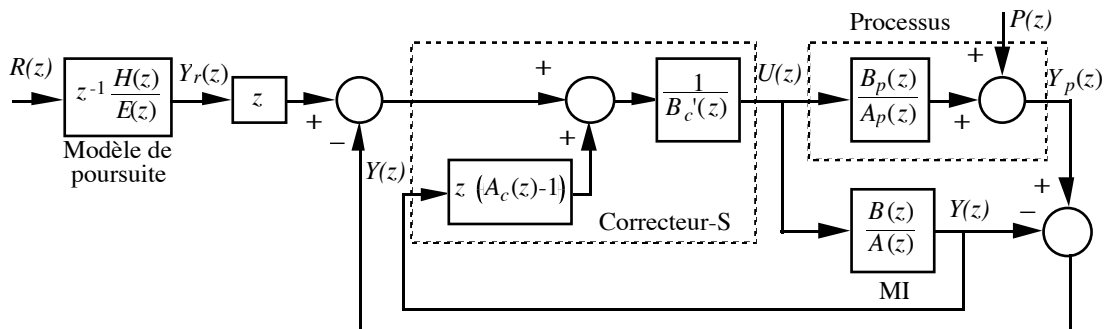


Figure 4.
SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite extérieur.

La commande $U(z)$ de la figure 4 s'écrit, en fonction de la consigne et de la perturbation :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z)}{A_p(z) B'(z) + A_p(z) (A(z) B_c'(z) - A_c(z) B'(z)) + z^{-1} (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - P(z) \right)$$

L'expression ci-dessus fait apparaître au dénominateur l'influence de la désadaptation modèle-processus et de l'imperfection du correcteur.

a) **Fonctionnement nominal** ($A = A_p$, $B = B_p$) .

Correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - P(z) \right)$$

Faisons apparaître l'intégrateur que réalise implicitement l'organe de commande en exprimant la perturbation P en fonction de Y_p et de U :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - Y_p(z) \right)$$

Il n'y aura donc pas d'erreur statique. La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + (1 - z^{-1}) P(z)$$

La dynamique de régulation est infiniment rapide : en effet, la perturbation est éliminée au bout d'un pas s'il s'agit d'un échelon. La commande oscille fortement à chaque pas d'échantillonnage si le polynôme B_p possède des zéros négatifs.

Correcteur imparfait ($A_c \neq A$, $B_c \neq B$) .

Nous étudions ce cas pour simuler un défaut d'apprentissage du correcteur. La commande est :

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - P(z) \right)$$

La stabilité du système de commande dépend du polynôme au dénominateur dont les racines sont étudiées au §II.1.1.2. Dans le cas présent, avec les notations du §II.1.1.2, $\varepsilon(z)=1$ et donc le système de commande risque fort d'être instable si le correcteur n'est pas parfait, et en particulier s'il est adapté à un modèle plus lent (dans l'exemple du §II.1.1.2, un correcteur adapté à un modèle plus lent correspond à $a_2 < a_1$).

b) Fonctionnement non nominal ($A \neq A_p$, $B \neq B_p$) ; correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

Dans ce cas, la commande s'écrit :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z)}{A_p(z) B'(z) + z^{-1} (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - P(z) \right)$$

Même dans le cas non nominal, pourvu que le correcteur soit parfait, l'organe de commande utilisant un MI réalise encore implicitement un intégrateur :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{A(z)}{B'(z)} \left(\frac{H(z)}{E(z)} R(z) - Y_p(z) \right)$$

La performance du système est donc robuste. Le SCSB équivalent est représenté sur la figure 5.

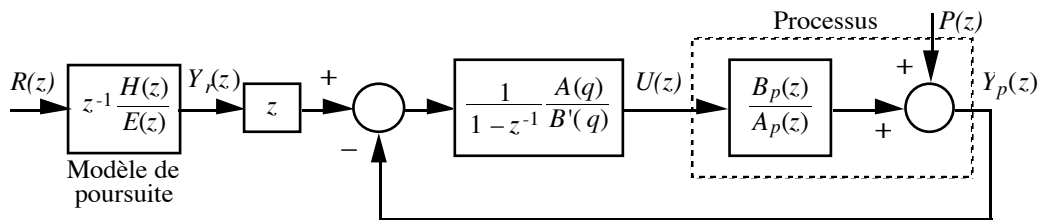


Figure 5.

SCSB équivalent au SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite extérieur (fonctionnement non nominal, correcteur parfait).

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = \frac{1}{A_p(z) B'(z) + z^{-1} (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} \left(z^{-1} A(z) B_p'(z) \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + (1 - z^{-1}) A(z) B_p'(z) P(z) \right)$$

On vérifie ainsi qu'il n'y a pas d'erreur statique pour une perturbation de sortie constante.

II.2.1.2. Avec un modèle de poursuite intérieur.

L'expression du modèle de poursuite à l'intérieur de la boucle du MI est :

$$E(q) y_r^*(k+1) = H(q) r^*(k)$$

où :

$$r^*(k) = r(k) - (y_p(k) - y(k))$$

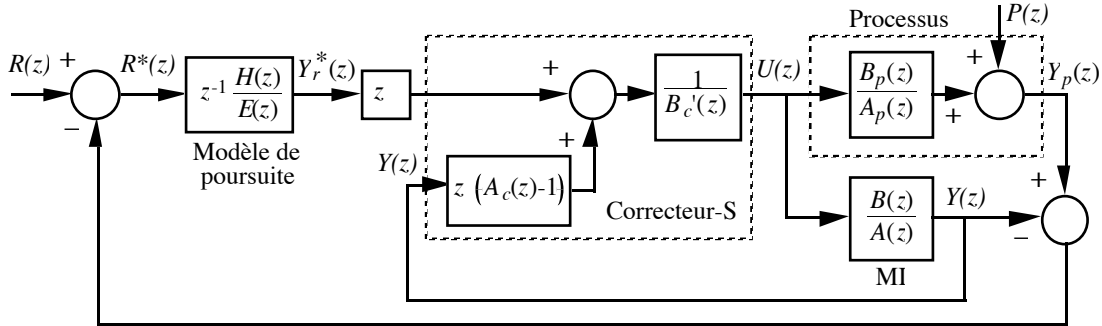


Figure 6.
SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite intérieur.

La sortie du correcteur-S de la figure 6 est la suivante :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z) H(z)}{E(z) A_p(z) (B'(z) + (A(z) B_c'(z) - A_c(z) B'(z))) + z^{-1} H(z) (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} (R(z) - P(z))$$

a) *Fonctionnement nominal* ($A = A_p$, $B = B_p$) .

Correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} \frac{H(z)}{E(z)} (R(z) - P(z))$$

La dynamique de régulation est identique à la dynamique de poursuite, et donc à la dynamique de référence. La dénominateur commun de la commande est $E B_p$, alors que dans le cas du SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite extérieur (§II.2.1.1), le dénominateur de la fonction de transfert par rapport à R est $E B_p$, mais le dénominateur de la fonction de transfert par rapport à P est B_p seulement. Si le polynôme B_p possède des zéros négatifs, l'effet en sera atténué pour le présent système.

Exprimons la commande en fonction de l'erreur :

$$U(z) = \frac{H(z)}{E(z) - z^{-1} H(z)} \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} (R(z) - Y_p(z))$$

Le premier facteur du dénominateur s'écrit :

$$E(z) - z^{-1} H(z) = \sum_{i=0}^p e_i z^{-i} - \sum_{i=0}^p h_i z^{-(i+1)}$$

Or le modèle de référence étant choisi de gain statique unité, on a l'égalité :

$$\sum_{i=0}^p e_i = \sum_{i=0}^p h_i$$

1 est donc racine du polynôme, ce qui nous permet d'écrire le polynôme sous la forme :

$$E(z) - z^{-1} H(z) = (1 - z^{-1}) Q(z)$$

où $Q(z)$ est un polynôme monique de degré $p-1$. L'organe de commande réalise encore implicitement un intégrateur :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{H(z)}{Q(z)} \frac{A_p(z)}{B_p'(z)} (R(z) - Y_p(z))$$

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + \left(1 - z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)}\right) P(z)$$

Correcteur imparfait ($A_c \neq A$, $B_c \neq B$) .

Cette éventualité est envisagée pour simuler un défaut d'apprentissage du correcteur. L'expression de la commande est la suivante :

$$U(z) = \frac{A_p(z)}{B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} \frac{H(z)}{E(z)} (R(z) - P(z))$$

Le polynôme apparaissant au dénominateur est le même que pour le système de commande précédent : la stabilité du présent système de commande n'est donc pas non plus robuste vis-à-vis d'une imperfection du correcteur.

b) Fonctionnement non nominal ($A \neq A_p$, $B \neq B_p$) ; correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

La commande s'écrit :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z) H(z)}{E(z) A_p(z) B'(z) + z^{-1} H(z) (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} (R(z) - P(z))$$

Pourvu que le correcteur soit adapté au modèle, l'organe de commande comprenant un MI réalise encore implicitement un intégrateur, comme le montre la figure 7 :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{H(z)}{Q(z)} \frac{A(z)}{B'(z)} (R(z) - Y_p(z))$$

La performance du système est donc robuste.

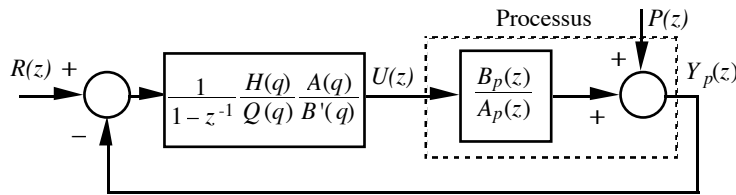


Figure 7.

SCSB équivalent au SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite intérieur (fonctionnement non nominal, correcteur parfait).

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = \frac{(A(z) B_p'(z) z^{-1} H(z) R(z) + (1 - z^{-1}) A_p(z) B'(z) Q(z) P(z))}{E(z) A_p(z) B'(z) + z^{-1} H(z) (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))}$$

On vérifie qu'il n'y a pas d'erreur statique pour une perturbation de sortie constante.

II.2.1.3. Avec un modèle de ralliement.

Le modèle de ralliement rallie la trajectoire du modèle à celle de la consigne décalée. L'expression du modèle de ralliement est :

$$y_r^*(k+1) = (1 - E(q)) y(k+1) + H(q) r^*(k)$$

où :

$$r^*(k) = r(k) - (y_p(k) - y(k))$$

La sortie du correcteur-S de la figure 8 est la suivante :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z) H(z)}{E(z) A_p(z) B'(z) + A_p(z) (A(z) B_c'(z) - A_c(z) B'(z)) + z^{-1} H(z) (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} (R(z) - P(z))$$

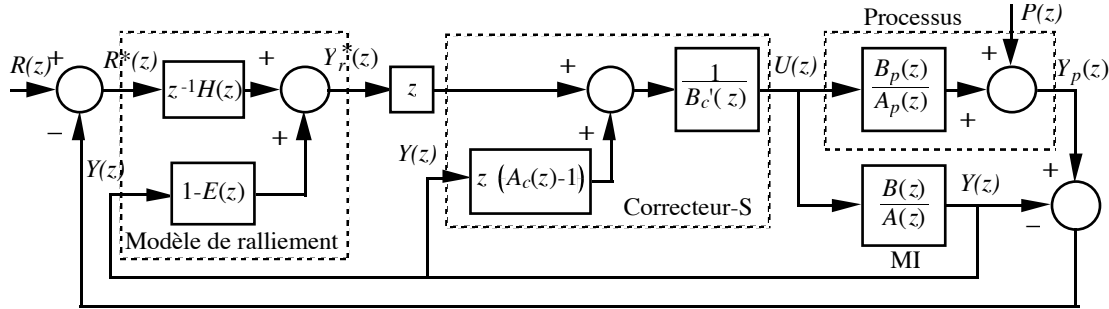


Figure 8
SCMI avec correcteur-S et modèle de ralliement.

a) *Fonctionnement nominal* ($A = A_p$, $B = B_p$) .

Correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

Le système est identique au SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite intérieure (§II.2.1.2).

Correcteur imparfait ($A_c \neq A$, $B_c \neq B$) .

L'expression de la commande est la suivante :

$$U(z) = \frac{A_p(z) H(z)}{E(z) B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} (R(z) - P(z))$$

Le polynôme apparaissant au dénominateur fait intervenir $E(z)$ (soit $\varepsilon(z) \neq 1$ avec les notations du §II.1.1.2) : la stabilité du présent système de commande est donc plus robuste vis-à-vis d'une imperfection du correcteur, que celle des deux systèmes précédents (où $\varepsilon(z) = 1$).

b) *Fonctionnement non nominal* ($A \neq A_p$, $B \neq B_p$); *correcteur parfait* ($A_c = A$, $B_c = B$) .

Le fonctionnement du système est identique à celui du SCMI avec correcteur-S et modèle de poursuite intérieure (§II.2.1.2). Ses propriétés de performance robuste sont les mêmes.

II.2.2. SCMI utilisant un correcteur-D.

L'entrée de consigne du correcteur-D est :

$$r^*(k) = r(k) - (y_p(k) - y(k))$$

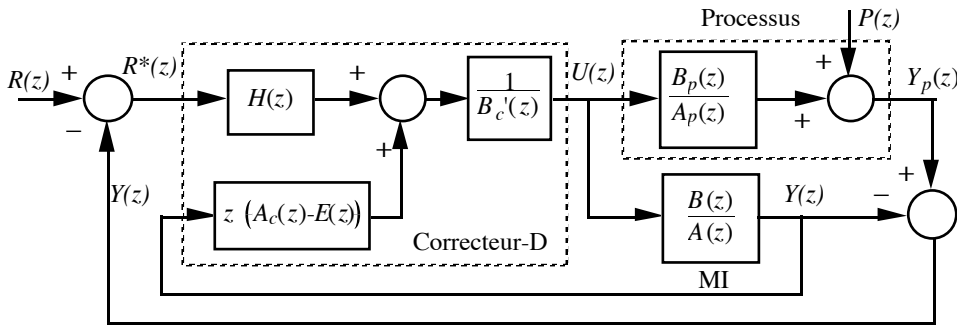


Figure 9.
SCMI avec correcteur-D.

La sortie du correcteur-D du schéma de la figure 9 est la suivante :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z) H(z)}{E(z) A_p(z) B'(z) + A_p(z) (A(z) B_c'(z) - A_c(z) B'(z)) + z^{-1} H(z) (A_p(z) B'(z) - A(z) B_p'(z))} (R(z) - P(z))$$

a) **Fonctionnement nominal** ($A = A_p$, $B = B_p$).

Correcteur parfait ($A_c = A$, $B_c = B$) .

$$U(z) = \frac{A_p(z) H(z)}{B_p'(z) E(z)} (R(z) - P(z))$$

En faisant apparaître l'intégrateur implicite :

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{H(z) A_p(z)}{Q(z) B_p'(z)} (R(z) - Y_p(z))$$

La sortie du processus est :

$$Y_p(z) = z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} R(z) + \left(1 - z^{-1} \frac{H(z)}{E(z)} \right) P(z)$$

La dynamique de régulation est la même que la dynamique de poursuite : elle donnée par le polynôme de référence $1/E$. Il n'y a pas d'erreur statique pour une perturbation de sortie constante puisque le modèle de référence est de gain unité. Le comportement de la commande est toujours satisfaisant quel que soient les zéros du processus (la commande est filtrée par E).

Correcteur imparfait ($A_c \neq A$, $B_c \neq B$) .

L'expression de la commande est la suivante :

$$U(z) = \frac{A_p(z) H(z)}{E(z) B_p'(z) + (A_p(z) B_c'(z) - A_c(z) B_p'(z))} (R(z) - P(z))$$

Dans ce cas, le système de commande est équivalent au système avec correcteur-S et modèle de raliement. Il est donc aussi relativement robuste vis-à-vis d'une imperfection du correcteur.

b) **Fonctionnement non nominal** ($A \neq A_p$, $B \neq B_p$) ; **correcteur parfait** ($A_c = A$, $B_c = B$) .

Dans ce cas, la commande s'écrit :

$$U(z) = \frac{A(z) A_p(z) H(z)}{E(z) A_p(z) B'(z) + z^{-1} H(z) (A(z) B_p'(z) - A_p(z) B'(z))} (R(z) - P(z))$$

C'est la même expression que dans le cas précédent : on retrouve les propriétés de la commande avec correcteur-S et modèle de raliement.

CONCLUSION.

Presque tous les systèmes de commande étudiés dans cette annexe sont proposés dans la littérature, mais rarement comparés objectivement. L'intérêt de ce travail est : d'une part, de les comparer sur la base de critères qui sont stabilité et performance du système nominal, et robustesse de cette stabilité et de cette performance ; d'autre part, d'indiquer lesquels de ces systèmes doivent être évités, et lesquels doivent être utilisés pour une commande neuronale. Récapitulons les conclusions de cette étude :

- Les systèmes de commande par simple bouclage (SCSB) ou avec modèle interne (SCMI) utilisant un correcteur-S et un modèle de poursuite extérieur à la boucle de retour d'état et, le cas échéant, extérieur à la boucle du modèle interne, ont la caractéristique d'une dynamique de régulation non maîtrisée, et d'une stabilité peu robuste. Les systèmes des paragraphes II.1.1.1 et II.2.1.1 utilisant un tel modèle de poursuite doivent donc être évités.
- Les SCMI présentent l'avantage sur les SCSB d'éliminer les erreurs statiques dues à toute perturbation de sortie en fonctionnement nominal, et de présenter une grande robustesse du niveau de performance vis-à-vis d'écarts par rapport au système nominal (erreur statique nulle pour le système non nominal).
- Un SCMI utilisant un correcteur-S doit comprendre un modèle de ralliement (et non un modèle de poursuite intérieur à la boucle du modèle interne), qui rend la stabilité du système plus robuste vis-à-vis d'une éventuelle imperfection du correcteur.
- Les SCMI utilisant un correcteur-D, ou un correcteur-S et un modèle de ralliement, ont des propriétés voisines. Cependant, le second doit être préféré si l'on utilise des réseaux de neurones, car changer de dynamique de poursuite si nécessaire (par exemple pour stabiliser le processus) ne demande pas de nouvel apprentissage, mais seulement de modifier le modèle de ralliement.

EXPRESSIONS DES CORRECTEURS -S ET -D	2
.....	2
07	
INTRODUCTION.	2
.....	2
07	
I. CORRECTEURS -S ET -D.	2
.....	2
07	
I.1. Expressions des correcteurs dans le cas d'un modèle entrée-sortie.	2
.....	2
08	
I.2. Expressions des correcteurs dans le cas d'un modèle d'état.	2
.....	2
10	
II. SYSTÈMES DE COMMANDE POUR LA POURSUITE ET LA RÉGULATION.	2
.....	2
12	
II.1. Systèmes de commande par simple bouclage (SCSB).	2
.....	2
13	
II.2. Systèmes de commande avec modèle interne (SCMI).	2
.....	2
16	
CONCLUSION.	2
.....	2
23	